

**2023 年第三十八屆成大數理比賽 – 數學**  
**38<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2023 - Mathematics**

1. 函數  $f(x) = 1 - \sqrt{4 + 3x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  的反函數為  $g(x) = px^2 + qx + r$ ,  $a \leq x \leq b$ 。求  $r + b$  的值。  
 The inverse function of  $f(x) = 1 - \sqrt{4 + 3x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  is  $g(x) = px^2 + qx + r$ ,  $a \leq x \leq b$ . Find the value of  $r + b$ .  
 (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1
  
2. 方程式  $x^2 - 3x + 1 = 0$  之二根為  $\alpha, \beta$ 。求  $\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$  的值。  
 The equation  $x^2 - 3x + 1 = 0$  has two solutions  $\alpha, \beta$ . Find the value of  $\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$ .  
 (A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C)  $4\sqrt{3}$  (D)  $4\sqrt{5}$
  
3. 求方程式  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) + x^2 = 0$  的最小根。提示： $1 \times 6 = 2 \times 3$ 。  
 Find the smallest root of the equation  $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) + x^2 = 0$ . Hint:  $1 \times 6 = 2 \times 3$ .  
 (A)  $2 - \sqrt{2}$  (B)  $3 - \sqrt{2}$  (C)  $2 - \sqrt{3}$  (D)  $3 - \sqrt{3}$
  
4. 若多項式  $(x^2 + ax + b)^2 = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$  的係數滿足  $2p = -r = 3s \neq 0$ ，求  $q$  的值。  
 The coefficients of the polynomial  $(x^2 + ax + b)^2 = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$  satisfy  $2p = -r = 3s \neq 0$ . Find the value of  $q$ .  
 (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11
  
5. 根式  $\frac{1}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$  可以化簡為  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$ ，其中  $a > b > c$  為有理數。求  $b$  的值。  
 The radical number  $\frac{1}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$  can be simplified as  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$ , where  $a > b > c$  are rational numbers. Find the value of  $b$ .  
 (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16
  
6. 三角函數  $f_1(x) = \sin(5x + \frac{\pi}{5})$ ,  $f_2(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$ ,  $f_3(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{2})$  的週期分別為  $T_1, T_2, T_3$ 。選出正確的敘述。  
 The periods of the trigonometric functions  $f_1(x) = \sin(5x + \frac{\pi}{5})$ ,  $f_2(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$ ,  $f_3(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{2})$  are  $T_1, T_2, T_3$  respectively. Choose the correct statement.  
 (A)  $T_1 < T_2 < T_3$  (B)  $T_2 < T_1 < T_3$  (C)  $T_3 < T_2 < T_1$  (D)  $T_1 < T_3 < T_2$
  
7. 化簡此值。Simplify the value.  $\sin^4(7.5^\circ) + \cos^4(7.5^\circ)$   
 (A)  $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$  (C)  $\frac{4 + \sqrt{3}}{6}$  (D)  $\frac{6 + \sqrt{3}}{8}$

**2023 年第三十八屆成大數理比賽 – 數學**  
**38<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2023 - Mathematics**

8. 三角形的三邊為 7, 8, 9。其外接圓半徑與內切圓半徑分別為  $R$  與  $r$ ，求乘積  $R \cdot r$  的值。  
Given a triangle whose sides are 7, 8, 9. Its circumradius and inradius are  $R$  and  $r$  respectively.  
Find the value of the product  $R \cdot r$ .  
(A) 10.5 (B) 14 (C) 17.5 (D) 21
9. 方程式  $\cos x = \cos 4x$  在區間  $0 < x < 2\pi$  上有幾個解？  
How many solutions of the equation  $\cos x = \cos 4x$  are there on the interval  $0 < x < 2\pi$ ?  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
10. 若  $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$  滿足  $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3$ ，求  $\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ 。  
Given  $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$  such that  $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 3$ , find the value of  $\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ .  
(A)  $\frac{12}{5}$  (B)  $\sqrt{2} + 1$  (C)  $2\sqrt{3} - 1$  (D)  $\frac{5}{2}$
11. 正方形  $ABCD$  的中心為  $(3, 3)$ 。若直線  $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  的方程式分別為  $x - 3y + 1 = 0$  與  $x - ay + b = 0$ ，求  $a + b$  的值。  
Given a square  $ABCD$  centered at  $(3, 3)$ . If the equations of lines  $\overline{AB}$  and  $\overline{CD}$  are  $x - 3y + 1 = 0$  and  $x - ay + b = 0$  respectively, find the value of  $a + b$ .  
(A) 5 (B) 8 (C) 11 (D) 14
12. 求函數的最小值。 Find the minimum value of the function.  
 $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-4)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (x^2-1)^2}$   
(A)  $\sqrt{31}$  (B)  $\sqrt{32}$  (C)  $\sqrt{33}$  (D)  $\sqrt{34}$
13. 有多少個整數滿足方程式  $|x + 1| + |x - 1| \leq x + 10$ ？  
How many integers are there satisfying the equation  $|x + 1| + |x - 1| \leq x + 10$ ?  
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14
14. 若等差數列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  滿足  $a_1 = 1$  與  $a_{100} = 99$ ，求級數  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$  的和。  
If an arithmetic sequence  $a_1, a_2, a_3, \dots$  satisfies  $a_1 = 1$  and  $a_{100} = 99$ , find the sum of the series  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ .  
(A) 4950 (B) 5000 (C) 5040 (D) 5045

**2023 年第三十八屆成大數理比賽 – 數學**  
**38<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2023 - Mathematics**

15. 若等比數列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  滿足  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$  與  $a_1 + a_3 = 6$ ，求無窮級數  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  的和。

If a geometric sequence  $a_1, a_2, a_3, \dots$  satisfies  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$  and  $a_1 + a_3 = 6$ , find the sum of the infinite series  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ .

- (A)  $\frac{16}{5}$  (B)  $\frac{24}{7}$  (C)  $\frac{32}{5}$  (D)  $\frac{40}{7}$

16. 給定矩陣  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  與  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 。若

$3A + 2B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，求  $a + b + c + d$  的值。

Given matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . If

$3A + 2B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , find the value of  $a + b + c + d$ .

- (A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28

17. 產品製造需經過三道程序，良率分別為 0.9, 0.8, 0.8。若產品最多只有一項瑕疵則視為合格，求此產品的良品率（選最接近值）。

A product is manufactured by passing through three processes with yield rates 0.9, 0.8, 0.8 respectively. A product is considered acceptable if at most one defect is found. Find the acceptance rate of the product (choose the nearest number).

- (A) 0.87 (B) 0.89 (C) 0.91 (D) 0.93

18. 擲骰子三次，求最大數字恰好為 5 的機率。

A die is rolled three times. The probability that the largest number is exactly 5.

- (A)  $\frac{53}{216}$  (B)  $\frac{59}{216}$  (C)  $\frac{61}{216}$  (D)  $\frac{67}{216}$

19. 正八邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  的各邊長為  $\sqrt{2}$ ，求內積  $\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_4A_7}$  的值。

Given a regular octagon  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  with each side length  $\sqrt{2}$ , find the value of the inner product  $\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_4A_7}$ .

- (A)  $-5 - 2\sqrt{2}$  (B)  $-4 - 3\sqrt{2}$  (C)  $-3 - 4\sqrt{2}$  (D)  $-2 - 5\sqrt{2}$

**2023 年第三十八屆成大數理比賽 – 數學**  
**38<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2023 - Mathematics**

20. 存在正整數  $n$  與非零實數  $L$  滿足極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^n} = L$ ，求  $\frac{L}{n}$  的值。

There exist a positive integer  $n$  and a nonzero real number  $L$  satisfying the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^n} = L. \text{ Find the value of } \frac{L}{n}.$$

- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D) 1

21. 給定函數  $f(x) = x^3 - x + 2$  與  $g(x) = f(f(x))$ ，求導數  $g'(1)$  的值。

Given functions  $f(x) = x^3 - x + 2$  and  $g(x) = f(f(x))$ , find the value of the derivative  $g'(1)$ .

- (A) 4 (B) 16 (C) 22 (D) 88

22. 求導數  $f'(1)$  的值。Find the value of the derivative  $f'(1)$ .  $f(x) = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{7}{8}$

23. 克普勒行星運動第三定律指出，行星運動週期的平方正比於其軌道半長軸的立方。若行星  $\Phi$  的運動週期比行星  $\Psi$  的週期較長 1%，則行星  $\Phi$  的軌道半長軸比行星  $\Psi$  的週期較長多少（選最接近值）？

Kepler's third law of planetary motion says that the squares of the orbital period of the planets are proportional to the cubes of the semi-major axes of their orbits. If the orbital period of planet is 1% longer than that of planet  $\Psi$ , then how much longer is the semi-major axis of planet than that of planet  $\Psi$  (choose the nearest number)?

- (A) 0.67% (B) 0.74% (C) 1.22% (D) 1.5%

24. 求定積分值。Evaluate the definite integral.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx$

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{4}{3}$

25. 求定積分值。Evaluate the definite integral.  $\int_0^1 (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$

- (A) 3.1 (B) 3.3 (C) 3.5 (D) 3.7