

**2022 年第三十七屆成大數理比賽 - 數學**  
**37<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2022 - Mathematics**

1. 已知  $(a, b)$  為方程組  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 7xy + 5 \\ x^2 - y^2 = 4xy - 1 \end{cases}$  的一組整數解，求  $|a - b|$ 。

Suppose  $(a, b)$  is an integral solution of  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 7xy + 5 \\ x^2 - y^2 = 4xy - 1 \end{cases}$ . Find  $|a - b|$ .

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

2. 求  $\frac{1}{70} \left[ \sum_{k=1}^{20} k(k^2 + 1) \right]$ 。

Find the value of  $\frac{1}{70} \left[ \sum_{k=1}^{20} k(k^2 + 1) \right]$ .

- (A) 420                      (B) 633                      (C) 840                      (D) 963                      (E) 572

3. 求兩函數  $\begin{cases} f(x) = 2 \log_x 25 \\ g(x) = 3 \log_{25} x + 1 \end{cases}$  圖形的交點個數。

Find the number of intersections of the following two functions  $\begin{cases} f(x) = 2 \log_x 25 \\ g(x) = 3 \log_{25} x + 1 \end{cases}$ .

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

4. 已知  $x, y$  滿足下列不等式  $\begin{cases} 4x + 3y \leq 30 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，求  $30x + 40y$  的最大值。

Find the maximum value of  $30x + 40y$  subject to the constraints  $\begin{cases} 4x + 3y \leq 30 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ .

- (A) 292                      (B) 288                      (C) 284                      (D) 280                      (E) 276

5. 已知多項式  $f(x)$  滿足  $\frac{f(x)}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{x + 1}{(x^2 + x + 4)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + x + 4}$ ，求  $f(x)$  除以  $(x^2 + 4)$  的餘式。

Suppose the polynomial  $f(x)$  satisfies  $\frac{f(x)}{(x^2 + x + 4)^2} = \frac{x + 1}{(x^2 + x + 4)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + x + 4}$ . Find the remainder of  $f(x)$  divided by  $(x^2 + 4)$ .

- (A)  $x + 1$                       (B)  $3x - 2$                       (C)  $2x + 2$                       (D)  $3x - 4$                       (E)  $2x - 3$

**2022 年第三十七屆成大數理比賽 - 數學**  
**37<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2022 - Mathematics**

6. 已知  $\alpha, \beta$  為方程式  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$  的兩個根，求  $\frac{2\alpha}{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha}$ 。
- Let  $\alpha, \beta$  be the two roots of the equation  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ . Find  $\frac{2\alpha}{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha}$ .
- (A)  $3 + 2\sqrt{2}$       (B)  $1 + 2\sqrt{2}$       (C)  $2 + \sqrt{2}$       (D)  $3\sqrt{2}$       (E)  $2\sqrt{2}$
7. 已知三角形三邊的長為 13, 14, 15，其內切圓與外接圓半徑分別為  $r, R$ ，求  $2rR$ 。
- Consider the triangle whose lengths of three sides are 13, 14, 15. Let  $r$  and  $R$  be the radii of its inscribed circle and circumscribed circle respectively. Find  $2rR$ .
- (A) 65      (B) 70      (C) 75      (D) 80      (E) 85
8. 已知  $0 \leq x < \pi$  且  $x$  滿足等式  $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$ ，求  $x$  可能的解的個數。
- How many solutions does the equation  $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$  have on the interval  $[0, \pi)$ ?
- (A) 4      (B) 8      (C) 6      (D) 12      (E) 16
9. 已知  $a, b$  是下列無理方程式  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{5}{2}$  的兩個解，且  $a > b$ 。求  $2a - b$ 。
- Let  $a, b$  ( $a > b$ ) be the two solutions of the equation  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{5}{2}$ . Find  $2a - b$ .
- (A) 3      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) 7
10. 已知  $a > 0$ ，且圓  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$  與圓  $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 = 0$  內切，求  $a$ 。
- Suppose  $a > 0$  and the two circles  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 = 0 \end{cases}$  are internally tangent. Find  $a$ .
- (A) 2      (B) 8      (C) 4      (D) 5      (E) 10
11. 三角形  $ABC$  的三個頂點座標為  $A(-2, 1), B(3, 4), C(1, -2)$ 。已知點  $P$  在  $\overline{AB}$  線段上且滿足  $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ ，求  $\tan(\angle PCB)$ 。
- Consider the triangle whose three vertices are  $A(-2, 1), B(3, 4), C(1, -2)$ . Let  $P$  be a point on  $\overline{AB}$  such that  $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ . Find  $\tan(\angle PCB)$ .
- (A)  $\frac{6}{23}$       (B)  $\frac{3}{5}$       (C)  $\frac{8}{17}$       (D)  $\frac{13}{4}$       (E)  $\frac{19}{13}$

**2022 年第三十七屆成大數理比賽 - 數學**  
**37<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2022 - Mathematics**

12. 設地球為一個半徑 6370 公里的正圓球。下列哪個數字（單位為公里）最接近地表上  $A(60^\circ S, 0^\circ E)$  與  $B(60^\circ S, 120^\circ E)$  兩點間的最短距離？  
Assume that the earth is a perfect sphere of radius 6370 km. Which of the following numbers (in kilometers) is closest to the shortest distance between two points  $A(60^\circ S, 0^\circ E)$  and  $B(60^\circ S, 120^\circ E)$  on the earth's surface?
- (A) 5700            (B) 5800            (C) 5900            (D) 6000            (E) 6100
13. 展開  $\sqrt{(1-x)^3}$  得前四項為  $a + bx + cx^2 + dx^3$ ，求  $a + b + c + d$ 。  
The first four terms of the series expansion of  $\sqrt{(1-x)^3}$  are  $a + bx + cx^2 + dx^3$ . Find  $a + b + c + d$ .
- (A)  $-\frac{3}{16}$             (B)  $\frac{5}{16}$             (C)  $-\frac{3}{8}$             (D)  $\frac{1}{8}$             (E)  $-\frac{1}{16}$
14. 已知  $\underline{a}$  與  $\underline{b}$  為二個非零向量且  $k$  為一正實數。若  $|\underline{a}| = 12$ ， $|\underline{b}| = 3$  且向量  $2\underline{a} + k\underline{b}$  與  $2\underline{a} - k\underline{b}$  互相垂直，則  $k =$   
Let  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$  be two nonzero vectors, and let  $k$  be a positive real number. If  $|\underline{a}| = 12$ ,  $|\underline{b}| = 3$ , and the vectors  $2\underline{a} + k\underline{b}$  and  $2\underline{a} - k\underline{b}$  are perpendicular to each other, then  $k =$
- (A) 1            (B) 2            (C) 4            (D) 8            (E) 16
15. 令  $i = \sqrt{-1}$ 。當  $n$  為下列何值時， $(\sqrt{3} + i)^n$  為一實數？  
Let  $i = \sqrt{-1}$ . For which of the following values of  $n$  is  $(\sqrt{3} + i)^n$  a real number?
- (A) 15            (B) 56            (C) -3            (D) -32            (E) -42
16. 橢圓  $x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$  的長軸的長度為何？  
What is the length of the major axis of the ellipse  $x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$ ?
- (A)  $4\sqrt{3}$             (B) 4            (C)  $2\sqrt{3}$             (D) 2            (E)  $\sqrt{3}$

**2022 年第三十七屆成大數理比賽 - 數學**  
**37<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2022 - Mathematics**

17. 已知曲線  $C$  的極坐標方程為  $r = \frac{5}{2 + 4 \cos \theta}$ 。下列選項何者正確？  
A curve  $C$  is defined by the polar equation  $r = \frac{5}{2 + 4 \cos \theta}$ . Which of the following is true?
- (A)  $C$  為一直線。  $C$  is a line.  
(B)  $C$  為一橢圓。  $C$  is an ellipse.  
(C)  $C$  為一拋物線。  $C$  is a parabola.  
(D)  $C$  為一雙曲線。  $C$  is a hyperbola.  
(E) 以上皆非 None of the above
18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - \ln 3}{x} \right)^x =$
- (A) 1                      (B) 0                      (C)  $\ln 3$                       (D) 3                      (E)  $\frac{1}{3}$
19. 下列哪一個選項為拋物線  $y = 2x^2 + 1$  在點  $(1, 3)$  處的切線方程式？  
Which of the following is an equation of the tangent line to the parabola  $y = 2x^2 + 1$  at the point  $(1, 3)$ ?
- (A)  $4x - y - 1 = 0$   
(B)  $2x - y + 1 = 0$   
(C)  $x - 4y + 11 = 0$   
(D)  $x - 2y + 5 = 0$   
(E) 以上皆非 None of the above
20. 下列敘述中，哪兩項正確？  
Which two of the following statements are true?
- (1) 方程  $x^{2020} - 2020x^{109} + 2018 = 0$  在閉區間  $[0, 1]$  內有實根。  
The equation  $x^{2020} - 2020x^{109} + 2018 = 0$  has a real root in the closed interval  $[0, 1]$ .
- (2) 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  與  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  皆不存在，則  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  亦不存在。  
If neither  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  nor  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  exists, then  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$  does not exist.
- (3) 若當  $-2 < x < 2$  時， $f'(x) > 0$ ，則  $f(-1) > f(1)$ 。  
If  $f'(x) > 0$  when  $-2 < x < 2$ , then  $f(-1) > f(1)$ .
- (4) 若  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續，則  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0$ 。  
If  $f$  is continuous on the closed interval  $[a, b]$ , then  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = 0$ .
- (A) (1), (2)                      (B) (1), (3)                      (C) (1), (4)                      (D) (2), (3)                      (E) (2), (4)

**2022 年第三十七屆成大數理比賽 - 數學**  
**37<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2022 - Mathematics**

21. 一等邊三角形的邊長增率為 5 mm/s。當邊長為 10 mm 時，三角形面積的增率為何？  
The sides of an equilateral triangle are increasing at a rate of 5 mm/s. At what rate is the area of the triangle increasing when the sides are 10 mm long?
- (A)  $50\sqrt{3}$  mm<sup>2</sup>/s  
(B)  $25\sqrt{3}$  mm<sup>2</sup>/s  
(C) 50 mm<sup>2</sup>/s  
(D) 25 mm<sup>2</sup>/s  
(E) 以上皆非 None of the above
22. 直線  $x + y = 0$  與拋物線  $x = y^2 + 3y$  所圍成圖形的面積為何？  
What is the area of the region bounded by the line  $x + y = 0$  and the parabola  $x = y^2 + 3y$ ?
- (A)  $\frac{32}{3}$             (B)  $\frac{16}{3}$             (C) 36            (D) 12            (E) 9
23. 函數  $f(x) = 6x^4 - 4x^3 + 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的最小值為何？  
What is the smallest possible value of the function  $f(x) = 6x^4 - 4x^3 + 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ )?
- (A) 4            (B)  $\frac{39}{8}$             (C)  $\frac{31}{8}$             (D)  $\frac{106}{27}$             (E)  $\frac{82}{27}$
24. 設  $f$  為一個定義在  $\mathbb{R}$  上的可微實值函數且  $f'$  連續。若  $f(1) = 0$  且  $f'(1) = 8$ ，則  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x^2) + f(1+3x^3)}{2x^2} =$   
Suppose  $f$  is a differentiable real-valued function defined on  $\mathbb{R}$  and  $f'$  is continuous. If  $f(1) = 0$  and  $f'(1) = 8$ , then  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x^2) + f(1+3x^3)}{2x^2} =$
- (A) -4            (B) -3            (C) 0            (D) 4            (E)  $\infty$
25. 設  $f$  為一個定義在  $(1, \infty)$  上的可微實值函數。若對所有  $x > 1$ ， $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$  且  $f(2) = 0$ ，則  $f(4) =$   
Suppose  $f$  is a differentiable real-valued function defined on  $(1, \infty)$ . If  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$  for all  $x > 1$  and  $f(2) = 0$ , then  $f(4) =$
- (A)  $\frac{1}{(\ln 2)^2}$   
(B)  $\frac{1}{2(\ln 2)^2}$   
(C)  $\frac{3}{4(\ln 2)^2}$   
(D)  $\frac{3}{8(\ln 2)^2}$   
(E) 以上皆非 None of the above