



馬來西亞留台成功大學校友會  
主 辦  
2024 年  
第三十九屆成大數理比賽

考生指示：

- (一) 解答所有問題。
- (二) 將正確答案在答案紙上的圓圈內“塗黑”，每題只准給一個答案。
- (三) 正確的答案得三分，錯誤的答案扣一分，不做答的零分。

**INSTRUCTIONS TO CANDIDATES**

1. Attempt all questions.
2. Pick the correct answer and make a mark “●” in the circle provided in the answer sheet. Only one answer is allowed for each question.
3. Three marks for a correct answer, one mark will be deducted for each wrong answer. No mark will be given to each question not attempted.

**2024 年第三十九屆成大數理比賽 – 數學**  
**39<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2024 - Mathematics**

1. 假設  $\cot\alpha, \cot\beta$  是一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0, (b \neq 0)$  的兩個根，求  $\tan(\alpha + \beta)$  的值。  
Assume  $\cot\alpha, \cot\beta$  are the roots of the equation  $ax^2 + bx + c = 0, (b \neq 0)$ .  
Find  $\tan(\alpha + \beta)$ .

(A)  $\frac{b}{a-c}$       (B)  $\frac{-b}{a-c}$       (C)  $\frac{a-c}{b}$       (D)  $\frac{c-a}{b}$

2. 已知  $P(Y)=0.6, P(X|Y)=0.8, P(X|Y^c)=0.4$ ，請問  $P(Y|X^c)=?$   
Given  $P(Y)=0.6, P(X|Y)=0.8, P(X|Y^c)=0.4$ , find  $P(Y|X^c)=?$   
(A) 0.75      (B) 0.25      (C) 0.667      (D) 0.333

3. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{n-1}}{e^{n+1}}$ 。 ; Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{n-1}}{e^{n+1}}$  .  
(A) 1      (B) 0      (C)  $\infty$       (D)  $-\infty$

4. 求  $\frac{1}{1 \times 4 \times 7} + \frac{1}{4 \times 7 \times 10} + \frac{1}{7 \times 10 \times 13} + \dots$  至  $n$  項的和。

(A)  $\frac{3n^2+5n}{4(3n+1)(3n+4)}$       (B)  $\frac{3n^2-5n}{4(3n+1)(3n+4)}$       (C)  $\frac{3n^2+5n}{8(3n+1)(3n+4)}$       (D)  $\frac{3n^2-5n}{8(3n+1)(3n+4)}$

5. 已知函數  $f(x) = (x - 1)^2, x \geq 1$ ，試求此函數  $f(x)$  的反函數及其相對應的定義域和值域。  
Given function  $f(x) = (x - 1)^2, x \geq 1$ , find the inverse function of  $f(x)$  and its corresponding domain and range.

(A)  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$ , 其定義域 (domain)  $0 < x < \infty$  和值域 (range)  $1 < f^{-1}(x) < \infty$ .  
(B)  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$ , 其定義域 (domain)  $0 \leq x < \infty$  和值域 (range)  $1 \leq f^{-1}(x) < \infty$ .  
(C)  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ , 其定義域 (domain)  $0 < x < \infty$  和值域 (range)  $1 < f^{-1}(x) < \infty$ .  
(D)  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ , 其定義域 (domain)  $0 \leq x < \infty$  和值域 (range)  $1 \leq f^{-1}(x) < \infty$ .

6. 試求在曲線  $y^2 + 2xy = x^3 + x + 1$  通過點 (1,1) 的切線方程式。

Find the tangent line of the curve  $y^2 + 2xy = x^3 + x + 1$  at the point (1, 1).

(A)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$       (B)  $y = x$       (C)  $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$       (D)  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

7. 展開  $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$  至第3項。Expand  $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$  to the third term.

(A)  $1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$       (B)  $1 + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8}$       (C)  $1 - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8}$       (D)  $1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$

**2024 年第三十九屆成大數理比賽 – 數學**  
**39<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2024 - Mathematics**

8. 假設一隨機變數  $X$  為投擲一公平的硬幣直到出現正面就結束所需要投擲的次數，請問在偶數次投擲到正面的機率為何？

Assume a random variable  $X$  represents the number of times a fair coin needed to be tossed until it comes up heads. What is the probability that heads will appear on an even-numbered toss?

- (A)  $1/2$                       (B)  $1/3$                       (C)  $1/4$                       (D)  $2/3$

9. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ 。 Find  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ 。

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C) 1                      (D) 2

10. 求焦點為  $(-2, -2)$  及  $(8, -2)$  且其一漸近線斜率為  $\frac{3}{4}$  的雙曲線的方程式。

Find the equation of hyperbola with focus points  $(-2, -2)$ ,  $(8, -2)$  and with slope  $= \frac{3}{4}$  of one of the asymptotes.

- (A)  $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$                       (B)  $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$                       (C)  $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$   
(D)  $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

11. 令  $\tan(x + y) = x$ 。試求  $dy/dx$  並計算此導數通過點  $(0, 0)$  的值。

Let  $\tan(x + y) = x$ . Find  $dy/dx$  and evaluate the derivative at the point  $(0, 0)$ .

- (A) 2                      (B) 1                      (C) -1                      (D) 0

12. 已知  $X$  其連續機率分配機率密度函數為  $f(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}$ ,  $0 < x < \infty$ 。

試求  $P(X > 8 | X > 5)$ 。

If a continuous random variable  $X$  has the probability density function

$f(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}$ ,  $0 < x < \infty$ . Find  $P(X > 8 | X > 5)$ .

- (A)  $1 - e^{-\frac{4}{3}}$                       (B)  $1 - e^{-\frac{1}{2}}$                       (C)  $e^{-\frac{4}{3}}$                       (D)  $e^{-\frac{1}{2}}$

13. 試求積分  $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$ 。 Evaluate  $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$ .

- (A)  $\ln \frac{|x-1|}{|x|} - \frac{1}{(x-1)} + c$                       (B)  $\ln \frac{|x|}{|x-1|} - \frac{1}{(x-1)} + c$                       (C)  $\ln \frac{|x-1|}{|x|} + \frac{1}{(x-1)} + c$                       (D)  $\ln \frac{|x|}{|x-1|} + \frac{1}{(x-1)} + c$

**2024 年第三十九屆成大數理比賽 – 數學**  
**39<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2024 - Mathematics**

14. 求  $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\cdots}}}}}$  的值。 Compute  $\frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\cdots}}}}}$  infinity

(A) 2      (B) 1      (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{1}{4}$

15. 試求由曲線  $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$  和  $g(x) = -x^2 + 2x$  所圍成圖形的面積。 Find the area of the region bounded by the graphs of  $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$  and  $g(x) = -x^2 + 2x$ .
- (A) 4      (B) 8      (C) 16      (D) 24

16. 利用隸美佛定理證明  $\sin 5\theta = ?$

Using De Moivre Theorem to show  $\sin 5\theta = ?$

- (A)  $14\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$       (B)  $16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$   
 (C)  $14\sin^5\theta + 5\sin\theta$       (D)  $16\sin^5\theta + 5\sin\theta$

17. 利用行列式性質計算  $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix}$

Compute the determinant of  $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x-2 \\ x-3 & x-6 & x \\ x-3 & x-1 & x-5 \end{vmatrix}$

- (A)  $15-5x$       (B)  $15+5x$       (C)  $-15+5x$       (D)  $-15-5x$

18. 考慮二次方程式  $4x^2 + 4Ux + U + 2 = 0$ ，此處  $U$  是一均勻非配在  $[0, 6]$  區間的連續隨機變數。試求此二次方程式有實數解的機率。

Consider the quadratic equation  $4x^2 + 4Ux + U + 2 = 0$ , where  $U$  is continuous random variable uniformly distributed on the interval  $[0, 6]$ . Find the probability of that the quadratic equation has real solutions.

- (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{5}{6}$       (D)  $\frac{1}{6}$

19. 試求函數  $f(x) = (x-6)(x+2)^3$  的反曲點。

Find the inflection points of  $f(x) = (x-6)(x+2)^3$ .

- (A)  $(-2, 0), (2, -256)$       (B)  $(1, -135), (2, -256)$       (C)  $(-2, 0), (4, -432)$   
 (D)  $(1, -135), (4, -432)$

**2024 年第三十九屆成大數理比賽 – 數學**  
**39<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2024 - Mathematics**

20. 試問  $c$  為何值時函數  $f(x) = c \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ ，在  $x = \frac{\pi}{3}$  時取得極值，它是極大值還是極小值，並求出此極值。

Find the value of  $c$  such that  $f(x) = c \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  has the extrema at  $x = \frac{\pi}{3}$ ; is it a maximum or a minimum? And compute the extrema value.

(A)  $c = -\frac{2}{3}$ ,  $f(x)$  有最小值  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       (B)  $c = \frac{2}{3}$ ,  $f(x)$  有最大值  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)  $c = -2$ ,  $f(x)$  有最小值  $-\sqrt{3}$       (D)  $c = 2$ ,  $f(x)$  有最大值  $\sqrt{3}$

21. 假設一離散隨機變數  $X$  有一個機率密度函數

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n. \quad \text{試求 } E(e^{tx}).$$

Let the discrete random variable  $X$  have a probability mass function  $P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \leq$

$p \leq 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$  Find  $E(e^{tx})$ .

(A)  $(pe^t + (1-p))^n$       (B)  $(pe^t + (1-p))^{-n}$       (C)  $(p + (1-p)e^t)^n$

(D)  $(p + (1-p)e^t)^{-n}$

22. 已知隨機變數  $X$  具有常態機率分配密度函數  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ,

$-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq \mu \leq \infty, \sigma^2 > 0$ . 試求  $E(|X - \mu|)$ .

If the random variable  $X$  has a normal distribution with the probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq \mu \leq \infty, \sigma^2 > 0.$$

Find  $E(|X - \mu|)$ .

(A) 0      (B)  $\sigma \sqrt{\frac{1}{\pi}}$       (C)  $\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$       (D)  $\sigma \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

23. 試求積分  $\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$ . Evaluate  $\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$ .

(A)  $\ln \frac{|x(x-2)|}{|x-1|} + c$       (B)  $\ln \frac{|x(x-1)|}{|x-2|} + c$       (C)  $\ln \frac{|x(x-2)|^{\frac{1}{2}}}{|x-1|} + c$       (D)  $\ln \frac{|x(x-1)|^{\frac{1}{2}}}{|x-2|} + c$

24. 試求微分方程  $y' = xy^2 - x - y^2 + 1$  的一般解。

Solve the differential equation  $y' = xy^2 - x - y^2 + 1$ .

(A)  $\frac{(y-1)}{(y+1)} = Ce^{x^2-2x}$       (B)  $\frac{(y+1)}{(y-1)} = Ce^{x^2-2x}$       (C)  $\frac{(y-1)}{(y+1)} = Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$

(D)  $\frac{(y+1)}{(y-1)} = Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$

**2024 年第三十九屆成大數理比賽 – 數學**  
**39<sup>th</sup> NCKU Science and Mathematics Competition 2024 - Mathematics**

25. 已知某一特定產品每日的需求量為  $X$ ，而  $X$  其連續機率分配機率密度函數為

$$f(x) = \frac{3}{256}(x-2)(10-x), \quad 2 \leq x \leq 10. \text{ 請問需求量 } X \text{ 的中位數為何?}$$

The daily demand  $x$  for a certain product with the probability density function  $f(x) = \frac{3}{256}(x-2)(10-x)$ ,  $2 \leq x \leq 10$ . Find the median of the demand.

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 9